「広国ドリル数学」トリセツ ＆ ここが大事！「単位量あたりの量」第3回

みなさん，こんにちは。「広国ドリル」の学習は順調に進んでいるでしょうか？ 今回も「広国ドリル数学」に関するメッセージをみなさんにお伝えしますので，ぜひ参考にしてください。今回は，文章が長く少し難しいかもしれませんが，かなり重要な内容ですので，がんばって解読してください！

―― 「広国ドリル数学」トリセツ 第3回 ――

・「広国ドリル」は「ベーシックコース」と「ステップアップコース」に分かれています。これらのドリルを大きく5つに分けて，入学までに無理なくコンスタントに学習することをおすすめします。

・今回は，「ベーシックコース」の「量の関係・文字式・関数」，「ステップアップコース」の「関数・グラフ」，「総合」をやってみましょう。まずは間違った問題番号を記録するなどして，苦手分野がどこかをきちんと把握してください。分かろうとする前に，分かっているのはどこで分かっていないのがどこかをきちんと仕分けすることが学習の第一歩となります。必ずその作業をしてから次の段階である苦手分野の克服へと進むようにしてください。

［文字式］

・今回学習では，文字式が多く出てきます。小学校までの「算数」が中学校からは「数学」になりますが，ここで最も様変わりするのが文字式の登場です。文字式とは，アルファベットの a，b などの文字を用いて表された数式のことです。ここでは，計算式において具体的な数が入るところをアルファベットにおきかえているだけのことです。通常，かけ算記号×が省略され（$a \times b \rightarrow ab$），割算記号÷は分数で表される（$a \div b \rightarrow a/b$ または $\dfrac{a}{b}$）など，文字式の表記にはいくつかのルールがあります。

・文字式の文字には，アルファベットがよく使われますが，よく見ると，斜体（イタリック体）になっていることに気付いていたでしょうか。数学の教科書をよく見てみましょう。数の代わりに書かれた1つ1つの文字は斜体表記になっています。一方で，単位（kg，m，s，A など），名称（AさんとBさんが・・・など）や位置（A 地点から B 地点・・・など）で用いる文字は（斜めになっていない，まっすぐ立っている）立体表記となっています。

・単位がある場合，一般的には a[cm]，b[kg]と書きます（理科の教科書を見てみましょう）。文字式は斜体，単位は立体文字で表し，さらに[ ]で単位を囲うことで，文字と単位を区別しています。ただし，数に単位が付く場合は，5[cm]，2.5[g]などとは書かず，5cm，2.5g と書き，[ ]で単位を挟む必要がありません。表記はできるだけシンプルにします。

［量の関係］

・「量の関係」の代表例としては，正比例の関係，反比例の関係でしょう。2つの数 x と y において，例えば，$y=5x$ は正比例の関係式，$xy=10$ は反比例の関係式です。

正比例の関係 ： x が2倍，3倍，・・・になれば，y も2倍，3倍，・・・・となる。

反比例の関係 ： x が2倍，3倍，・・・になれば，y は 1/2倍，1/3倍，・・・・となる。

[関数]

- さきほどの y=5x や xy=10 のような x と y の関係式を「関数」と言います。正確には，ある x に対して1つの y が定まるとき，「y は x の関数である」と言います。
- y=5x のとき，x が1増えるごとに y は5増える，このとき，x の前の定数 5 を“比例定数”，また“変化の割合”などと言います。

[グラフ]

- 関数 y=5x は「ある x に対して y はその5倍の数である」という x と y の関係を表します。この関係を視覚的に表現してイメージしやすくするための1つの方法が“グラフ”なのですが，別段「グラフにすることが絶対に必要だ」というわけではありません。ここは，ある意味ひとつのポイントです。
- ですが，昔ある数学者が好奇心からあることを試みました。平面に横軸と縦軸を定め，x の値を横軸に，y 値を縦軸にとり，様々な x に対して y=5 x を満たす無数の点(x,y)を打っていきました。すると，原点(0,0)を通る右上がりで“傾き”5 の直線となることが分かったのです(今では当たり前のことですが)。このように y=5x の関係を図示することをグラフ化といい，この直線を y =5 x のグラフといいます。ですから，「y =5 x は直線的に変化する」と言っても意味が通じるのですが，それは我々にグラフの知識・イメージがあるからなのです。このように関係式をグラフ化することで，もっと複雑な x と y の関係式ではどのような図形が描かれるのか？放物線や円を描くのはどのような x と y の関係式なのか？さらには，立体図形，例えば球を描くには，xyz の3次元の軸が必要で，それはどのような関係式になるのか？と好奇心がどんどん膨らんでいき，数学が飛躍的に発展する原動力となったのです。

[方程式]

- ここに x と y の関係式 y=5x があります。この関係を満たす(x,y)は無数にありますが，もし，y=15 だとしたら，15=5x となります。このような式は文字式 x のみの等式となり，これを x に関する「方程式」といいます。方程式であれば，x は未知数ということで解き明かす対象となります。「方程式を解く」，いわゆる「解 x を求める」とは，この等式を満たす x はどのような数かを探す作業ということになります。未知数が1つの場合は1つの等式があれば解き明かすことができます。
- では，未知数が2つの場合，例えば，1つの等式 y=5x があるとします。しかし，これだけでは2つの未知数 x,y は定まりませんが，そこにもう1つの等式 y=3x+2 が加わると，x と y の連立方程式となり，未知数 (x, y) の解 $(1, 5)$ が求まります。つまり，2つの未知数があるときは，それを解くには2つの等式(条件)が必要となります。ちなみに，グラフで言うと，連立方程式が表す2つの直線の交点の座標が連立方程式の解になっていることは，みなさん知っていますよね。

以上，広国ドリルで今回やってほしい内容についてのポイントを述べましたが，ここで，単位について，よく考えてみましょう。中学校の数学から単位についてあまり問われなくなると前回言いましたが，単位を抜きした計算は現実的にはあり得ません。 ここで，例えば y =5 x の関係において，1) x と y の単位が同じ場合，2) x と y の単位が異なる場合について，変化の割合(ここでは 5)が何を意味するのかについて考えてみましょう。

1) x と y の単位が同じ場合

例えば, x[m]を 5 倍したものが y[m]という関係であれば, 変化の割合である 5 は単なる数(単位のない数, "無次元数"と言います)になります。このとき, $x : y$ = 1:5 の関係です。みなさんは, 比については, 5:4 とか, 2:3 とか, 単に数だけで考えがちだと思いますが, 実際には, 5m:4m とか, 2 秒:3 秒とか, 同じ単位がついたものどうしの比をとっています。これらの比をとると, 5m : 4m = 5m÷4m = 5m/4m = 5/4 = 1.25 と, 分子と分母の単位[m]が互いに打ち消し合って, 単なる数(単位のない数, 無次元数)になってしまいます。なので, この単位のない比(比率)というのは, 5m は 4m の 1.25 倍というような○倍の数であり, またこれを"割合"と言ったりもします。 確認

a が b の何倍かを表す式は $a : b = a \div b = a/b = \frac{a}{b}$ (この関係がすぐに出てこない人が多いです。確認しましょう)であり, 別の言い方として, b に対する a の割合, b に対する a の比(率)などという。式の後者(あるいは分母)b が基準となる数(割合で言うところの, 1とみなす数)であることをしっかりと頭に入れておく。

2) x と y の単位が異なる場合

例えば, x [h] が時間(1h=1hour=1時間=60 分), 距離 y [km] の関係だと, 変化の割合である 5 は速さ 5km/h となります(hour(アワー)の h は黙字と言って発音しない)。 また, 質量 y, 体積 x, 密度の関係だと, y [g] = 5 g/㎤ × x [㎤] のようになります。このように変化の割合は 1)の比とは異なるものになります。1)では変化の割合の単位が消えてしまいましたが, それは x と y の単位が同じだったからです。 x と y の単位が異なる場合, 変化の割合は「単位量あたりの量」というものになります。さて, 割算によって, この質量 y, 体積 x, 密度の関係を確認してみましょう。 y [g] ÷ x [㎤] = 5 g/㎤ では, 質量を体積で等分する割算をした結果, 「単位体積あたりの質量」である密度が求まります。一方で, y [g] ÷ 5 g/㎤ = x [㎤] では, 質量から「単位量あたりの量」である密度を引き算の繰り返しである除算(前回の内容を思い出してください)した結果, 体積が求まります。

ここで, ようやく入学後の「科学リテラシー」で学修する「単位量あたりの量」という言葉がでてきました。これで, 前回予告していた話題に入ることができます。ということで, 次へ進みましょう。

―― 「広国ドリル数学」ここが大事！第3回「単位量あたりの量」 ――

では, 今回, 大変重要な「単位量あたりの量」について順を追って話をしていきます。

- 第1回では, 「計算力には2種類あります」ということを話しました。その2つとは,
  - ① 四則演算(足し算・引き算・掛け算・割り算)を整数, 小数, 分数でできるかどうか？
  - ② 次に, 計算問題において, 式を決める力, 適切な式が分かるかどうか？ 例) $A \times B$ か, $A \div B$ か, $B \div A$ か？
- 第2回では, この②の式を決める能力について, 特にわかりにくい計算の代表格が「割算」であるということについて話しました。我々は A÷B の計算を通常「割算」と言っていますが, (1)等分する「割算」と(2)引き算の繰り返しである「除算」という2つの考え方があることについては理解できたでしょうか。具体的には,

密度＝質量÷体積は（1)の等分の意味 ／ 体積＝質量÷密度 は(2)の除算の意味
速さ＝距離÷時間は（1)の等分の意味 ／ 時間＝距離÷速さ は(2)の除算の意味
で,「割算」の考え方が違うということを思い出してください。

・ 第3回(今回)では, 割算の(1)の等分によって出てきた商(割算の答え)の意味を考えていきましょう。上の例のように, 密度は単位体積あたりの質量(例: ８ g/㎤ は１㎤ あたり８ g), 速さは単位時間あたりに進む距離(例: 60km/h＝1時間あたり60km 進む)。これが難しければ, 10 個のりんごを５人で分ける場合は 10 個÷5 人=2個/人で, 1人あたり２個ずつで考えてみるとよいでしょう。この「単位量あたりの量」は, いろいろな計算をするうえで非常に重要な考え方なのですが, それにも関わらずきちんと理解できていない人が多いので, 1年次の授業「科学リテラシー」で1つの章を設けて学習してもらっています。「単位量あたりの量」の理解がきちんとできていない主な理由は, 多くの人が苦手な割算・割合・分数・比が関係しているからです。

「単位量あたりの量」の代表例として, 速さについて考えてみましょう。例えば, 時速 30 ㎞の場合, “単位量”とは単位時間である1時間であり, “単位量あたりの量”とは1時間あたりに進む距離 30 ㎞のことです。「時速 30 ㎞」は次のような別の言い方もしますが, すべて同じ意味です。

時速 30km ＝ 毎時 30km = 30km/時 = 30km/h = 30km/1h

最後の 30km/1h では, 分母をあえて 1h と書いていますが, 通常”1”は省略します。しかしながら, これが 1h であることから,

$$30\text{km}/1\text{h} = \frac{30\text{km}}{1\text{h}} = \frac{60\text{km}}{2\text{h}} = \frac{90\text{km}}{3\text{h}} = \frac{120\text{km}}{4\text{h}} = \cdots\cdot$$

分母・分子に同じ数を掛けても分数の値は変わらない。1h につき 30km ならば, 2h で 60km, 3h で 90km 進み, “＝” は同じペースで進むことを意味する。

とできることを強く意識してください。これこそが変化の割合の意味です。また, 30km/1h を上と同様に分数で表現し, 1h → 60 分や 1km → 1000m と単位変換を行うことで,

$$30\text{km}/1\text{h} = \frac{30\text{km}}{1\text{h}} = \frac{30\text{km}}{60\text{分}} = \frac{1\text{km}}{2\text{分}} = \frac{1000\text{m}}{2\text{分}} = \frac{500\text{m}}{1\text{分}} = 500\text{m}/\text{分}\ (\text{毎分}\ 500\text{m})$$

と時速○km を分速○m と単位変換することができます。就職試験などでもよく出題されるようですが, 苦戦する大学生や社会人が多くいることが昨今の社会問題となっています。

さらに, 分母と分子をひっくり返す(逆数をとる)と 1h/30km となります。これは, 30km につき1時間, つまり 30km 進むのに1時間かかるという意味になります。このひっくり返しても意味があるということをよく理解してください。

$$1\text{h}/30\text{km} = \frac{1\text{h}}{30\text{km}} = \frac{60\text{分}}{30\text{km}} = \frac{60\text{分}\div 30}{30\text{km}\div 30} = \frac{2\text{分}}{1\text{km}} = 2\text{分}/\text{km}(1\text{km あたり 2 分かかる})$$

単に数だけの比で考えますと, 30:1 = 30÷1 = 30/1 = 30 を 1:30 = 1÷30 = 1/30 = 0.0333･･･(時間のままでの計算, 上の計算では 1/30 時間＝2 分となる) と逆数をとることに相当します。p.3 の 1)で説明しましたように, a と b の単位が同じ場合, 比は単なる(単位なしの)数

となり，a:b=5m:4m=5:4=1.25，b: a = 4m:5m=4:5=0.8 と a と b の順序を入れ替えると，a を基準にするか，b を基準にするかが変わるだけです。しかし，p.3 の 2)で説明しましたように，ここでは分母と分子の単位が異なるので，比は「単位量あたりの量」になります。「1 時間あたり 30km 進む」の分母と分子を入れ替えると，「1 ㎞あたり 1/30 時間(2 分)かかる」と，単位量が1時間から 1km に入れ替わります。この点をよく覚えておき，計算で使えるようにしてください。

それでは，復習です。次の「単位量あたりの量」の分子と分母を入れ替えると，どうなるでしょうか。

2個/人(1人あたり 2 個) → $\frac{1\text{人}}{2\text{個}} = \frac{1\text{人}\div 2}{2\text{個}\div 2} = \frac{0.5\text{人}}{1\text{個}}$ = 0.5 人/個(1個あたり 0.5 人分)

0.5 個/人(1人あたり0.5 個) → $\frac{1\text{人}}{0.5\text{個}} = \frac{1\text{人}\times 2}{0.5\text{個}\times 2} = \frac{2\text{人}}{1\text{個}}$ = 2 人/個(1個あたり 2 人分)

15km/h(1時間あたり15km)→ $\frac{1\text{h}}{15\text{km}} = \frac{60\text{分}}{15\text{km}} = \frac{60\text{分}\div 15}{15\text{km}\div 15} = \frac{4\text{分}}{1\text{km}}$(1km あたり4分)

8 g/㎤ (1 ㎤あたり 8g) → $\frac{1\text{㎤}}{8\text{g}} = \frac{1\text{㎤}\div 8}{8\text{g}\div 8} = \frac{0.125\text{㎤}}{1\text{g}}$ = 0.125 ㎤/g(1g あたり 0.125 ㎤)

さて，できたでしょうか。そして，今回の内容の重要さを分かっていただけたでしょうか？ 最後にこの重要さがよくわかる問題を紹介しましょう。いきなり出題すると理科系の大学生でもしばらく考え込んでしまう問題なのですが，今回の内容が理解できていれば余裕で解くことができますよ。

一見すると難しい問題 「ここに液体窒素(チッソ)があります。この液体窒素の密度は 0.83g/mL です。これを加熱するなどして気化させたところ，気体窒素の密度は 1.25g/L になりました。窒素は液体の状態から気体の状態になることで，体積が何倍に膨張したでしょう。」

ヒント 密度は「単位量あたりの量」です。先ほどの分子と分母をひっくり返すやり方で，窒素 1g あたりが液体から気体に変わった場合の体積を考えてみましょう。また 1L(リットル)=1000mL (ミリリットル)です。

このように液体が気体に変化することを“気化”といいますが，このとき，「体積がおよそ 1000 倍程度に膨張する」ことを知っておきましょう。ですので，輸送時や保存時の省スペースのためには液化がどれだけ大切かが分かる問題だと思います。ちなみに，窒素(N_2)は空気(水蒸気を抜いた乾燥空気)中の約 80%を占めます。では，残りは何でしょう？残りの約 20%は酸素(O_2)です。この比は4:1ですね。すると，今何かと話題の二酸化炭素(CO_2)やその他のガスはこの2つに比べると無視できるくらい微量ということです。さて，この問題の答え合わせは次回にするとしましょう。

今回は説明も長く，内容もわかりにくかったかもしれませんが，大変重要な内容なのでていねいに説明したつもりです。ゆっくりと何度も読み返して，慎重に理解を深めていってください。

薬学部薬学科　園田 幸治