「広国ドリル数学」トリセツ＆ここが大事！

第5回「算数界の隠しボスは？」

みなさん，こんにちは。「広国ドリル」の学習は順調に進んでいるでしょうか？ 今回も「広国ドリル数学」に関するメッセージをみなさんにお伝えしますので，ぜひ参考にしてください。さて今回で，いよいよ最終回となります。もうゴール直前，あともう一息ですので，がんばって学習しましょう！

―― 「広国ドリル数学」トリセツ ――

これまで「広国ドリル数学」の「ベーシックコース」と「ステップアップコース」それぞれのドリルを大きく5つに分けて，入学までに無理なくコンスタントに学習することをおすすめしてきました。今回がその最終回です。あとは残りの「ベーシックコース」の「図形」，「ステップアップコース」の「図形」を学習して完成ですね。図形の学習では，平面図形や立体図形を考えることで平面や空間というものを感覚的に把握することがとても大切です。平面とは縦と横の2次元（2-Dimension，2D），空間とは縦・横に高さ（あるいは奥行き）が加わった3次元（3-Dimension，3D）の世界です。また，平行・垂直，三角形の合同・相似，その他の図形の性質を利用した「図形の証明」は論理的な思考を養うという意味でも重要な学習単元です。

[幾何（きか）学に王道なし]

小学校や中学校で学習するこれら図形に関する知識は「初等幾何（きか）学」に含まれる内容です。この初等幾何学は，古代オリエント（現在の中東地域，エジプト周辺）から起こり，2300 年前の古代エジプトの数学者ユークリッドによって「ユークリッド原論」として集大成され，それによって「ユークリッド幾何学」とも言われます。ユークリッドによって完成された初等幾何学は 2000 年以上前の古代オリエントの権力者たちのたしなみ（教養）としてよく学ばれていました。エジプト王（プトレマイオス1世）に幾何学を教えていたユークリッドは，王から幾何学を簡単に学ぶ方法を尋ねられた時，「幾何学に王道なし」と答えたという有名な故事があります。「幾何学に王道なし」から転じた「学問に王道なし」ということわざならば聞いたことがあるのではないでしょうか？ 「王道」とは王様のために特別に用意された近道や平易な道の意味です。学問を修得するためには，たとえ王様であろうと簡単に身につける平易な方法はなく，地道に学習を積み重ねる必要があるということです。我々は生涯様々なことを学び続けますが，とても重要なことを言っていると思いませんか。

[ピタゴラスの定理]

「三平方の定理」も図形の学習には欠かせない単元です。2500年ほど前に，この定理を発見したと言われているギリシャの数学者ピタゴラス（2002年から放送の NHK 教育テレビ「ピタゴラスイッチ」，アルゴリズム体操などでお馴染みの教育番組のタイトルの元）にちなんで「ピタゴラスの定理」とも言います。直角三角形の辺の長さの関係（斜辺の長さを c，残りの2つの辺の長さを a，b とすると） a^2+b^2

$= c^2$ の式は，数学の公式の中でも最も有名なものの1つと言ってもよいでしょう。ところで，2500年前のギリシャにはピタゴラスのような数学者を含め多くの学者がいましたが，当時は，今で言う学問のほとんどは「哲学」と言われていました。哲学者であり，数学者でもあったピタゴラスは，独自の思想に基づくピタゴラス教団なるものを運営していました。その教義には驚くべきものがたくさんあり，現在では間違いなくカルト教団と呼ばれてしまうでしょう。例えば，ピタゴラス教団は無理数の存在を認めず（「数」の美学上，絶対に受け入れられなかった），弟子たちには無理数の研究を禁止させ，研究に手を出した弟子をリンチで殺してしまうなどの逸話（すべてが本当かどうか分かりませんが）が多く残されています。しかしながら，ピタゴラス教団の徹底した秘密主義により，教団の著作物などの文字情報が全く存在していません。数学者としてあれだけ有名なピタゴラスですが，彼の言行や人物像は実は今でも謎につつまれたままなのです。ピタゴラス教団について興味のある人は調べてみてください。

［平方・立方／面積・体積］
さて，今回は「図形」の話をしていますが，前回「平方，立方について，次回の面積・体積の話でくわしく説明します」と予告しました。平面図形や立体図形の面積・体積を考えることは，平面や空間での図形的な感覚と数量的（定量的）な感覚を同時に考える必要があります。このとき，「次元」と「単位」という考えも重要になってきます。前回，累乗（べき乗）について，「同じ数字を何回もかけることを“累乗（るいじょう）”と言い，例えば，x を n 回かけた数を“x の n 乗”と言い，x^n と書きます。特に，同じ数字を2回かけることを“平方（へいほう）”,3回かけることを“立方（りっぽう）”と言います。」とお話しました。

ここでは，平面や空間の話をしていますので，平方や立方については，一辺の長さが x の正方形の面積は x^2，一辺の長さが x の立方体の体積は x^3 というように，平方は面積，立方は体積と関係があるのかなと想像できます。それと同様な例は，円の面積や球の体積・表面積です。

円の面積＝π×（半径）^{2}　　球の体積 ＝ $\dfrac{4\pi}{3}$×（半径）^{3}　　球の表面積＝４π×（半径）^{2}

のように，面積には半径の2乗，体積には半径の3乗が含まれています。確かに，これらの図形の面積・体積に同じ数の2乗（平方），3乗（立方）が含まれています。しかしながら，平面図形，立体図形の例として，正方形，立方体，円，球はかなり特別な存在です。

［面積・体積／次元と単位］
一般的な平面図形，立体図形においては，面積や体積はどうなっているのでしょう。例えば，長方形の面積，直方体の体積はどうでしょう。

長方形の面積 ＝ （縦の長さ）×（横の長さ）　→ （長さ）^{2}　長さの次元２
直方体の体積 ＝ （縦の長さ）×（横の長さ）×（高さ）　→ （長さ）^{3}　長さの次元３

先ほどとは違い，必ずしも縦・横・高さの数が同じではないので，累乗の形にはなりません。しかし，ここで，面積であれば長さの2乗（平方），体積であれば長さの3乗（立方）となっていることは，正方形，立方体，円，球の面積・体積と同様です。確かに，面積の単位を「平方メートル」，体積の単位を「立方メートル」などと言います。これが，「次元（Dimension）」という考え方です。ここでは，

円の周長など図形の周の長さであれば　「長さの次元」が １

平面図形の内部の面積や立体図形の表面積であれば　　「長さの次元」が 2
立体図形の内部の体積であれば　　　　　　　　　　　「長さの次元」が 3
となります。冒頭で説明した「平面は2次元（2-Dimension，2D），空間は3次元（3-Dimension，3D）」も少し意味合いは違うのですが，同様の意味です。ただし，ここで2D,3D と言っているのは「長さ」の Dimension のことです。ここは，念を押しておきます。というのも，単位には，その他，質量，時間，温度，電流，等々あり，次元（Dimension）は長さに限ったものではありません。例えば（ここは少し難しいかもしれませんが），

密度［g/cm^3］ →「質量の次元」1 ×「長さの次元」-3 → ［M^1L^{-3}］
加速度［m/s^2］ →「長さの次元」1 ×「時間の次元」-2 → ［L^1T^{-2}］
ここで　L：Length（長さ），M:Mass（質量），T：Time（時間）

このような単位の組み合わせに関する分析を「次元解析」と言います。

多くの計算において我々はデータを扱いますが，この1つ1つのデータは「数」+「単位」からなっているという話を覚えていますか。確か，第2回です。同じ5という数であっても，5m，5m^2，5m^3 では指しているものが異なることは明らかです。単位なしの数であれば 5+5 とはできても，単位があれば，5m＋5m^2 は長さと面積を足しているので，おかしいことはわかりますよね。このように，実際的な計算においては，「単位」とその「次元」がとても重要になってきますので，今後も意識して見るようにしてください。

[スケーリング則と次元]
さて，面積は長さの次元2，体積は長さの次元3を持つとのことですが，これに関して，あるどんな立体図形（例えば，直方体）であっても，縦・横・高さのサイズをそれぞれ2倍にしたら，つまり，長さ2倍に拡大コピーしたらということですが，表面積は 2^2=4倍，体積は 2^3=8倍になります。この指数部分の2，3 が面積・体積の次元になっていることに注意しましょう。例えば，両者の体型がほぼ同じである体長10cmのマウスと体長20cm のマウスがいたとします。体長10cm のマウスの体重を測定すると25g でした。体長が2倍なので縦・横・高さのサイズがそれぞれ2倍で体積が8倍となりますので，体重は 25g×8=200g と試算できます。このような考え方を専門用語で「スケーリング則」といいます。「スケーリング則」は単位の次元と深く関わっています。一般化して，縦・横・高さのサイズを x 倍にすると，表面積は x^2 倍，体積は x^3 倍となります。そうしますと，長さが 3 倍，5 倍，10倍，1/2 倍，1/3 倍などは計算がすぐにできますが，一方で，長さが 15%（x=1.15）増しだとか，5%減（x=0.95）の場合の面積・体積も2乗・3乗すればよいのですが，整数倍よりは計算がかなり複雑になります。もちろん電卓があれば計算はできますが，元の長さに対して−20%から+20%の変化が面積・体積にどの程度影響するかについては，近似を用いて暗算で即答できるようにしておくと便利です。

[平方・立方の近似計算]
この近似を行うために，「式の展開」の公式に活躍してもらいましょう。

$$(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3 = a^3\pm 3a^2b\mp 3ab^2\pm b^3$$

みなさんのなかには，このような式の展開を習ったとき，なんでこんな式を覚えないといけないのかとか，実際の生活で使うことはないのでは？と思った人もいたかもしれません。そこで，少し実際的な計算に役立ててみましょう。$a \gg b$（a にくらべて b がかなり小さいときの意）であるとき，

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \fallingdotseq a^2 \pm 2ab$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b \mp 3ab^2 \pm b^3 \fallingdotseq a^3 \pm 3a^2b$$

という近似式が利用できます。これは，a にくらべて b がかなり小さいので，b^2 や b^3 を含む項はとても小さくなり，計算において無視できるということです。例えば，$a = 1$，$b = 0.1$ とすると，

$1.1^2 = (1+0.1)^2 = 1+2\times1\times0.1+0.1^2 = 1+0.2+0.01 (=1.21) \fallingdotseq 1+0.2 = 1.2$

$0.9^2 = (1-0.1)^2 = 1-2\times1\times0.1+0.1^2 = 1-0.2+0.01 (=0.81) \fallingdotseq 1-0.2 = 0.8$

$1.1^3 = (1+0.1)^3 = 1+3\times1^2\times0.1+3\times1\times0.1^2+0.1^3 = 1+0.3+0.03+0.001 (=1.331) \fallingdotseq 1+0.3 = 1.3$

$0.9^3 = (1-0.1)^3 = 1-3\times1^2\times0.1+3\times1\times0.1^2-0.1^3 = 1-0.3+0.03-0.001 (=0.729) \fallingdotseq 1-0.3 = 0.7$

このように，$1.07^2 \fallingdotseq 1.14$，$1.07^3 \fallingdotseq 1.21$ だとか，$0.98^2 \fallingdotseq 0.96$，$0.98^3 \fallingdotseq 0.94$ などの2乗，3乗の近似計算に利用できます。この近似計算はぜひできるようにしておきましょう。ただし，$a = 1$ に対して $b = 0.2$ 程度以上，つまり a に対して b が 20%程度以上になってくると，近似式が徐々に成り立たなくなっていきますので，この点には注意する必要があります。

ここでの話はまさに「微分・積分」の内容になります。「微分・積分」は高校の数学で習った人もいるでしょう。もともと面積や体積を求める計算から「微分・積分」は生まれました。例えば，

x^2 の微分：$2x$　　　　x^3 の微分：$3x^2$

となりますが，先程の$(a \pm b)^2$，$(a \pm b)^3$ の展開式の黄色部分と一致していること気づいてほしいわけです。微分・積分というと，一見難しく感じるかもしれませんが，具体的な計算を知れば，それほど難しい内容ではないことがわかるかと思います。

[長さの変化が面積・体積に及ぼす影響]

この計算結果を面積・体積の計算に適用すると，長さが 10%増加（減少）すると，面積は約 20%，体積は約 30%増加（減少）することが分かります。以下，例をあげておきます。

- 長さが 5%増加（減少）だと，面積は約 10%，体積は約 15%増加（減少）する
- 長さが 3%増加（減少）だと，面積は約　6%，体積は約　9%増加（減少）する

となり，知っておくと面積・体積の概算に便利です。これを応用すると，例えば，身長 160cm，体重60kgの人が，身長が5%増加して168cmになった場合，体表面積は10%，体積は15%の増加なので，体重は 69kg 程度になると試算できます（ただし，体型が変わらない場合）。

[平方根・立方根と長さ・面積・体積の関係]

さて，「同じ数の2乗が平方，3乗が立方」という話をしてきましたが，ある数の 1/2 乗を2乗根あるいは“平方根（square root）”，1/3 乗を3乗根あるいは“立方根（cube root）”と言います。これも前回の復習です。面積や体積について言えば，

面積の平方根　$(\text{面積})^{1/2} = \sqrt{\text{面積}}$　→　その面積を持つ正方形の一辺の長さ

体積の立方根　(体積)$^{1/3}$ = $\sqrt[3]{体積}$　→　その体積を持つ立方体の一辺の長さ

が求まります。例えば，面積が 64cm^2 の正方形の一辺の長さは 8cm であり，体積が 64cm^{3}の立方体の一辺の長さは 4cm です。ここのところは，大変重要です。よく理解してください。

前回，液体窒素が気体窒素になると体積が664倍になるという計算問題がありました。窒素は無数の窒素分子 N_2 の集まりです。体積が 664 倍になったとき，窒素分子 N_2 どうしの間隔がおよそ何倍になったことになりますか？いきなりは難しいかもしれませんので，こういうときは簡単にして約 1000 倍として考えましょう。気化した場合，およそ体積が 1000 倍になると覚えておきましょうと言いました。この場合，分子どうしの間隔が 10 倍になったと考えればよいですね。縦・横・高さがそれぞれ 10 倍で10×10×10＝1000 倍です。つまり，$\sqrt[3]{1000} = 10$ のように3乗根を取ればよいわけです。 では664倍の場合はどうでしょう。$\sqrt[3]{664}$ ですが，8×8×8＝512，9×9×9＝729 ですので，$8^3 < 664 < 9^3$ となります。 3乗根をとっても，大小関係は変わりませんので，$8 < \sqrt[3]{664} < 9$ で，約8～9倍ということになります。電卓や Excel で正確な値 $\sqrt[3]{664}$≒8.7 を出せます。液体窒素が気化したことにより，窒素分子 N_2 の間隔が約 9 倍に拡がったことになります。一方で，密度についても考えてみましょう。気化したことで，窒素の体積は664倍に膨張したので，逆に気体の密度は液体の密度の 1/664の値になったことになります。

3次元の話よりも簡単な2次元の話をしておきましょう。校庭に全校生徒が集合し，生徒は片方の腕を水平に伸ばして互いの間隔を取って整列しましたところ，校長先生が慌てた様子で両腕を水平に伸ばして「密です。密です。Keep distance！」と言いましたので，生徒たちは間隔を拡げて整列し直しました。さて，生徒たちが占める面積は何倍になりましたか？また，単位面積あたりの生徒数(人口密度)は何倍になりましたか？互いの距離が2倍になったので，面積はたて2倍×よこ2倍＝4倍に拡がり，逆に人口密度は前の1/4 となりましたということですね。

このような人口密度や物体の体積・密度などの問題を感覚的に理解するためには，平面(2D)や空間(3D)のイメージの把握がとても重要になってきます。そういった意味でも，今回の単元「図形」をしっかりと学習しておいてください。

――「広国ドリル数学」ここが大事！ 「算数界の隠しボスは？」――

前回，「小学校で習う算数で，分数の割り算はラスボスだ」と言いましたが，実はもうひとつラスボス格ではありながら，あまり目立たない，いわゆる“算数界の隠しボス”なるものを紹介しましょう。それは「割合の問題」です。大学生・社会人でも大変苦手としている人が多く，就職試験などにもよく出題されます。例えば，消費税の計算や意味が分からないなども，割合が分かっていないからでしょう。

[割合とは]

これらの問題を考えるとき，まずは，百分率や割分厘は，かならず割合(何倍か)に変えること忘れない

ようにしてください。例えば，消費税8%とあれば基準に対する 0.08 倍，3 割とあれば基準に対する 0.3 倍のように。a に対する b の比率 $b \div a = \dfrac{b}{a}$ を a に対する b の割合という（a を1とすると，b はいくらになるかという）こと → この割合の値に 100 をかけた数値を100分率(%)という（a を100とすると，b はいくらになるかという）ことになります。

$a : b = 1 : b$ の a に対する割合 $=$ 100% : b の a に対する100分率(%)

例） 5 : 2 = 1 : 0.4 = 100% : 40%

[還元率と付与上限の計算]

最近，QRコード決済型の電子マネー（PayPay，auPAY，d 払いなど）で，例えば「30%還元，付与上限 1500 円」などのキャンペーンを実施しているのをよく見かけます。さて，この還元の上限に達する購入額はいくらでしょうか？なぜ，これを考えるのかと言うと，それ以上支払った額は 30%還元の対象にならないからですね。

このような問題を解くとすると，まずは 30%を 0.3 として 1500 円÷0.3 の式がほぼ条件反射的に出てくる人が大半ではないでしょうか。また，この式が出てこない，あるいはこの式であっているのか自信が持てない場合，中学校で習う方程式を使えば，次のようにある意味機械的に解けます。

上限の購入額を x として， $x \times 0.3 = 1500$ の方程式を立てます。これを解くには， 両辺を 0.3 で割って， $x \times 0.3 \div 0.3 = 1500 \div 0.3$ として， $x = 1500 \div 0.3$ となります。 そこで，「何が難しいんだ，これを解くだけではないか」と，特に疑問を持ったことはないという人も多いのではないでしょうか。改めて，この式を見てみましょう。なぜ，この式で答えが出るのか？と問われると説明しにくいのではないでしょうか。小学校の算数では，このように方程式で解くことはできませんので，むしろ中学校の数学よりも内容的には難しいと思います。

[割合の問題は算数界の隠しボスか？]

計算としては「0.3 で割る → 3/10 で割る → 分数の割り算なので分子と分母を入れ替えた数（逆数）10/3 をかける」で，前回に説明したとおり，分数の割り算で説明できるのでは？と思います。が，この問での 1500 円÷0.3 の割り算は 1)等分，2)除算のどちらの意味の割り算でしょうか？ これは，ぱっと答えられる人は少ないと思います。全体を1としているため，割合は1より小さいことが多いです。そうすると，1より小さい数で割ることになります。なぜこのような式になるのか？ 実は分かっていない人が多く（というより考えたこともなく），地味で気づかれていないこの難問を今回「算数界の隠しボス」と認定したわけです。式の意味なんて，そこまで考えなくても･･･となりそうですが，せっかくの機会ですので，よく考えてみましょう。

[1500 円÷0.3 の割り算の解釈]

実を言いますと，1500 円÷0.3 は割り算の1)等分，2)除算のどちらでも考えることができます。

まず, 1)等分での考え方を見てみましょう。
0.3=3÷10 ですので, 1500円÷0.3 = 1500 円÷(3÷10) = 1500 円÷3×10 ＝500 円×10 ＝ 5000 円 となります。これは, 1500 円を3等分して, 10倍していることになります。3等分したことで500円がでますが, これが1割分(10%分), 割合でいえば 0.1 に相当しますので, 次にこれを 10 倍することで, 購入額 5000 円が求められるという考え方です。もともと問題では 30%だったので, 1%分は 1500 円÷30＝50 円(ここで 30 等分しています)ですので, その 100 倍が 100%分である 5000 円という考え方でも同じです。改めて式で書くと, 1500円÷0.3 ＝ 1500 円÷(30÷100) = 1500 円÷30×100 ＝50円×100 ＝ 5000 円となります。

では, 2)除算での考え方はどうでしょうか。
30%は割合 0.3 ですので, 購入額を 1 とすると, それに対する 0.3 が1500円ということになります。そうすると, 購入額1が 0.3 の何倍かがわかれば, それに1500円をかけることで購入額が出るはずです(分からないという人は線分図を書いてみてください)。すると, 1÷0.3=1/0.3=10/3 ですが, このわり算は「1 から 0.3 がいくつ引けるか」と見なせますので, ここで除算を使っていますね。3.333・・・回引ける, つまり, 1500 円の3. 333・・・倍ということです。よって, 1500 円×(10/3)=5000円となります。これは, 元に戻ると1500円×(1÷0.3) でありますが, ×1は計算上なくてもよいので, 簡単にすると1500円÷0.3 という式になります。よって, 元々は1500円×(1÷0.3)だった式を, 無駄を省いた式にしてしまった結果, 1500円÷0.3 となり, 本来の式の意味がわかりにくくなってしまったということです。

[イメージを描き意味を考えながら解くことが実力アップにつながる]
このように, 求める式が1500円÷0.3 と言われても, これは式を整理した最終結果なので, この式だけで「意味を読み取れ」というのが実は無理な話なのです。分数の割り算のところでも, 「分子・分母を入れ替えてかける」とありましたが, これも最終結果だけを使って計算してしまうことで, なぜこうすればよいのかがわからなくなってしまう代表例です。「途中の考え方はいりません, 結果だけ教えて」という生徒と, 「途中の考え方を教えるのは面倒くさいな」という先生が出会ってしまうと, 算数がただの計算ドリルになってしまい, 算数の考え方の面白さ・奥深さが伝わらなくなってしまうという, とても残念なことになります。やはり, 常に問題のイメージを描きながら, また式の意味を考えながら問題を解くことが実力向上にとって大切なことだと思います。

さて, それでは, 数値を変えて復習です。
(問)還元 40%, 付与上限 600 円のとき, 還元対象の購入額の上限は？
(解答) 1)等分の考え方　600 円÷(40÷100) = 15 円×100 ＝ 1500 円
　　　 2)除算の考え方　600 円÷0.4 = 600 円×(1÷0. 4) =600円×2. 5倍 ＝ 1500 円

もう1問解いてみましょう。消費税のしくみがきちんと理解されていないためかもしれませんが, これは正答率がかなり低い問題です。
(問)ある食品を購入したところ, レシートに 8%消費税として 36 円分が記載されていました。商品の

価格(税抜価格)はいくらでしょう。また，税込価格は何円でしょう。
(解答)この問題は，一般的には電卓なしに即答できる人はそれほど多くないと思いますが，すでにみなさんはいろいろと学びましたので，暗算で答えられるでしょう。36÷0.08 でもよいのですが，暗算で即答するには，1)等分の考え方で 1%あたりがいくらかを考えるとよいですね。1%分が 36 円÷8=4.5 円なので，100%分は 100 倍の450円ですね。これが税抜価格ですので，税込価格は450円＋36円＝486円となります。

[詳しくは入学後の「科学リテラシー」にて]
今回までの5回にわたって，計算に関する知識についていろいろとお話ししてきました。とにかく，みなさんに最もお伝えしたいことは，第1回で話しました「式を決める力(A×B か，A÷B か，B÷A か)を十分に身に付けてほしい」ということです。そこで，特に割り算の式を決めることを苦手とする人が多いので，割り算の意味を中心にお話をしてきました。みなさんにお伝えしたい計算の知識はまだまだたくさんあります。詳しくは，入学後の授業「アカデミックリテラシー」の「科学リテラシー」でしっかりと学修してほしいと思います。そのためにも，入学までに「広国ドリル数学」をよく学習しておいてください。では，この4月に，みなさんにお会いすることを楽しみにしています。では，それまで，ごきげんよう。

薬学部薬学科　園田 幸治